Chapitre 4 : Calcul algébrique

Table des matières

1 Sommes

1.1 Notation symbolique

Soit I un ensemble fini, et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.
On note $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ la somme de tous les nombres a_i lorsque i décrit l'ensemble I.

Dans le cas particulier où I est de la forme $[\![p\,;n]\!]$ avec p et n des entiers, cette somme est notée $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_i$:

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Par convention, dans le cas où $I = \emptyset$, la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ vaut 0 (élément neutre pour l'addition).

En particulier, si $p > n$, la somme $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_i$ vaut 0 (car l'ensemble $[\![p\,;n]\!]$ est vide).

Remarque : Dans une telle écriture, la variable i est muette : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{k=p}^{n} a_k \ldots$

Exemples 1.1 : Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2$.

1.2 Linéarité de la somme

Proposition 1.2 (linéarité de la somme)

Soient p et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leqslant n$, $(a_i)_{i\in[\![p\,;n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![p\,;n]\!]}$ deux familles de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{i=p}^{n}(a_i + \lambda b_i) = \sum_{i=p}^{n} a_i + \lambda \sum_{i=p}^{n} b_i$$

Exemple 1.3 : Calculer $\sum\limits_{k=1}^{5}(2k^2+1)$.

1.3 Décalage d'indice

Proposition 1.4 (décalage d'indice $j = i + k$)

Soient p, n et k des entiers tels que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in[\![p\,;n]\!]}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{j=p+k}^{n+k} a_{j-k}$$

Remarque : Un changement d'indice $j = i + k$ se fait en **3 étapes** :

1. changement de l'indice dans le terme général : a_i devient a_{j-k}.
2. changement de l'indice inférieur de la somme : $i = p$ devient $j = p + k$;
3. changement de l'indice supérieur de la somme : $i = n$ devient $j = n + k$;

Exemple 1.5 : Écrire $\sum\limits_{j=2}^{n+3} a_{j-2}$ plus simplement.

1.4 Progressions arithmétiques

Théorème 1.6 (somme des premiers entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

Théorème 1.7 (somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, et soient p et n des entiers tels que $p \leqslant n$.
Alors $\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

1.5 Télescopage

Définition 1.8 (somme télescopique)

Soient p et n des entiers tel que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n+1\}}$ une famille de complexes.
On appelle <u>somme télescopique</u> une somme de la forme : $\sum_{i=p}^{n}(a_{i+1}-a_i)$.

Proposition 1.9 (calcul d'une somme télescopique)

Soient p et n des entiers tel que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n+1\}}$ une famille de complexes.
Alors $\sum_{i=p}^{n}(a_{i+1}-a_i) = a_{n+1}-a_p$.

Exemple 1.10 : Calculer $\sum_{k=5}^{29} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1.6 Progressions géométriques

Théorème 1.11 (factorisation de $a^n - b^n$)

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$

Remarque :

- En particulier, pour $b=1$, $a^n - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$.
- Lorsque n est impair, on a $-b^n = (-b)^n$, ce qui conduit à la relation :

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^k b^{n-1-k} = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^{n-1-k} b^k$$

Théorème 1.12 (somme des q^k)

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.

Théorème 1.13 (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, et soient p et n des entiers tels que $p \leqslant n$.
Alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = (\text{premier terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

Exemple 1.14 : Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$).

Théorème 1.15 (somme des racines n-ièmes de l'unité)

Pour tout $n \in [\![2\,;+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{e}^{2\mathbf{i}k\pi/n} = 0$.

Cas particulier : Pour $n = 3$, on retrouve la relation : $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = 0$.

1.7 Regroupement et découpage de termes

Proposition 1.16 (découpage d'une somme)

Soient p et n des entiers tel que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n\}}$ une famille de complexes. Soit $k \in [\![p,n]\!]$.
Alors $\sum\limits_{i=p}^{n} a_i = \sum\limits_{i=p}^{k} a_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_i$.

Exemple 1.17 : Soit $n \geqslant 5$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \max(i,5)$.

Proposition 1.18 (découpage d'une somme selon la parité de l'indice)

Soient p et n des entiers tel que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n\}}$ une famille de complexes.
Alors $\sum\limits_{i=p}^{n} a_i = \sum\limits_{\substack{i=p \\ i \text{ pair}}}^{n} a_i + \sum\limits_{\substack{i=p \\ i \text{ impair}}}^{n} a_i$

Exemple 1.19 : Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{500} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.

1.8 Autres sommes classiques

Théorème 1.20 (somme des premiers carrés)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

Théorème 1.21 (somme des premiers cubes)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$.

1.9 Sommes doubles

Définition 1.22 (sommes doubles rectangulaires)

Soient I et J des ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres complexes.
On appelle <u>somme double rectangulaire</u> une somme de la forme :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

Dans le cas particulier où $I = [\![p\,;n]\!]$ et $J = [\![q\,;m]\!]$ sont de la forme $[\![p\,;n]\!]$ avec p, n, q et m des entiers, on peut noter $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n\\ q\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=q}^{m} a_{i,j}\right)}_{\ll \text{ somme par ligne } \gg} = \underbrace{\sum_{j=q}^{m}\left(\sum_{i=p}^{n} a_{i,j}\right)}_{\ll \text{ somme par colonne } \gg}$.

<u>Représentation des termes impliqués dans la somme double rectangulaire :</u>

$i \backslash j$	q	$q+1$	...	m
p	$a_{p,q}$	$a_{p,q+1}$	...	$a_{p,m}$
$p+1$	$a_{p+1,q}$	$a_{p+1,q+1}$	...	$a_{p+1,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$a_{n,q}$	$a_{n,q+1}$	...	$a_{n,m}$

Notation : Lorsque $I = J = [\![p\,;n]\!]$, la somme rectangulaire est notée $\displaystyle\sum_{p\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$.

Proposition 1.23

Soient I et J des ensembles finis et $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles de nombres complexes.

On a : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$

Exemple 1.24 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$ puis $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2$.

Définition 1.25 (sommes doubles triangulaires)

Soient p et n des entiers et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![p\,;n]\!]^2}$ une famille de nombres complexes.
On appelle somme double triangulaire une somme de la forme :

$$\sum_{p \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)}_{\text{« somme par ligne »}} = \underbrace{\sum_{j=p}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j} a_{i,j}\right)}_{\text{« somme par colonne »}}$$

Représentation des termes impliqués dans la somme double triangulaire :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$\dots$	n
p	$a_{p,p}$	$a_{p,p+1}$	$\dots$	$a_{p,n}$
$p+1$		$a_{p+1,p+1}$	$\dots$	$a_{p+1,n}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
n				$a_{n,n}$

Remarque : Les sommes doubles triangulaires peuvent également exclure la diagonale : $\sum\limits_{p \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j}$.

Exemple 1.26 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$ et $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$.

2 Produits

On définit de même que pour les sommes la notation $\prod\limits_{i\in I} a_i$ ou $\prod\limits_{i=p}^{n} a_i$ pour un produit, avec la convention qu'un « produit vide » vaut 1 (élément neutre pour la multiplication).

Exemple 2.1 : Calculer $\prod\limits_{i=1}^{4} i^2$.

Proposition 2.2 (lien entre produits et sommes)

1. Pour toute famille finie $(a_i)_{i\in I}$ de réels strictement positifs, $\ln\left(\prod\limits_{i\in I} a_i\right) = \sum\limits_{i\in I} \ln(a_i)$.
2. Pour toute famille finie $(a_i)_{i\in I}$ de complexes, $\exp\left(\sum\limits_{i\in I} a_i\right) = \prod\limits_{i\in I} \exp(a_i)$.

Définition 2.3 (factorielle d'un entier naturel)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \dots \times n$$

Ce nombre est appelé factorielle n (ou n factorielle).

Valeurs à retenir : $0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n(n-1)!$

Définition 2.4 (produit télescopique)

Soient p et n des entiers tel que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n+1\}}$ une famille de complexes non nuls.
On appelle produit télescopique un produit de la forme : $\prod_{i=p}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i}$.

Proposition 2.5 (calcul de produit télescopique)

Soient p et n des entiers tel que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n+1\}}$ une famille de complexes non nuls.
Alors $\prod_{i=p}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$.

Exemple 2.6 : Calculer $\displaystyle\prod_{k=5}^{29} \frac{k+1}{k}$.

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

3.1 Coefficients binomiaux

Définition 3.1 (coefficient binomial k parmi n)

Soient n et $k \in \mathbb{Z}$. Le coefficient binomial est noté $\binom{n}{k}$ (lire « k parmi n »).

Il est défini par $\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exemple 3.2 : Calculer $\binom{4}{2}$ et $\binom{2}{4}$.

Remarque : On s'intéresse uniquement aux coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour n et k entiers naturels.

Proposition 3.3 (propriétés des coefficients binomiaux)

Soient n et $k \in \mathbb{N}$.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. Si $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
3. Si $k \leqslant n$, alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. Formule du triangle de Pascal : $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$.

Remarque : On peut représenter les coefficients binomiaux dans un tableau. C'est sa forme triangulaire qui donne le nom de *Triangle de Pascal*.

$n \backslash k$	0	1	2	3	$\dots$	k	$k+1$
0	$\binom{0}{0}=1$	0	0	0	$\dots$	0	0
1	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$	0	0	$\dots$	0	0
2	$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=2$	$\binom{2}{2}=1$	0	$\dots$	0	0
3	$\binom{3}{0}=1$	$\binom{3}{1}=3$	$\binom{3}{2}=3$	$\binom{3}{3}=1$	$\ddots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\binom{n}{0}=1$	$\binom{n}{1}=n$				$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$
$n+1$	$\binom{n+1}{0}=1$	$\binom{n+1}{1}=n+1$					$\binom{n+1}{k+1}$

3.2 Formule du binôme

Théorème 3.4 (formule du binôme)

Pour tous $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$

Exemple 3.5 : Soit $x \in \mathbb{C}$. Calculer $(1+x)^5$.

Corollaire 3.6

Pour tous $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$: $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Remarque : Retenir que les signes $+$ et $-$ sont alternés. Par exemple : $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

3.3 Applications à la trigonométrie

Linéarisation : Pour linéariser une expression du type $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$:

- on utilise les formules d'Euler pour exprimer $\cos\theta$ ou $\sin\theta$ en fonction d'exponentielles complexes ;
- on développe en utilisant la formule du binôme ;
- on regroupe les termes ayant des arguments opposés de manière à faire apparaître des cosinus ou des sinus.

Exemple 3.7 : Soit $t \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin(2t)^6$.

Développement : Pour exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme des polynômes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

- on utilise la formule de Moivre : $\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta} = (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n$
- on développe en utilisant la formule du binôme ;
- on prend la partie réelle ou imaginaire ;
- éventuellement, on utilise la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ pour tout exprimer en fonction de cos ou sin.

Exemple 3.8 : Soit $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5t)$ en fonction de $\cos(t)$.

4 Systèmes linéaires

Définition 4.1 (opérations élémentaires)

Dans un système linéaire, on appelle opérations élémentaires sur les lignes les opérations suivantes :
- *transposition* : échange de deux lignes, noté $L_i \leftrightarrow L_j$;
- *dilatation* : multiplication d'une ligne par un scalaire λ non nul, noté $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- *transvection* : addition d'un multiple d'une ligne à une autre, noté $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque : Les opérations élémentaires conservent les équivalences.

Méthode du pivot : On veut résoudre un système linéaire à n équations et p inconnues.
- On choisit un coefficient non nul (le « pivot »).
- On le place sur la première ligne (opération $L_i \leftrightarrow L_j$).
- On met des zéros en-dessous (opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $i \neq j$).
- Si une ligne « $0 = 0$ » apparaît, on l'enlève (équation toujours vraie).
- Si une ligne du type « $0 = 1$ » apparaît, le système est incompatible, et on s'arrête (il n'y a pas de solution).
- On oublie (pour l'instant) la première ligne et on recommence la même chose avec les équations restantes (on a une inconnue de moins).
- À la fin, si on n'a pas trouvé d'incompatibilité, on obtient un système échelonné, que l'on sait résoudre : dans la dernière équation, on exprime une des variables en fonction des autres (si nécessaire), puis on remonte les équations pour exprimer les autres variables.

Éventuellement, on peut à tout moment multiplier une ligne par un coefficient non nul de manière à simplifier les calculs (opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$, avec $\lambda \neq 0$).

Exemple 4.2 : Résoudre le système d'inconnues réelles suivant $\begin{cases} y + z = 4 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$.

Remarque : Si le système est compatible et qu'on obtient r équations à la fin (une fois qu'on a enlevé les équations redondantes), on va pouvoir exprimer les solutions en fonction de $p - r$ paramètres.

Exemple 4.3 : Résoudre le système d'inconnues réelles suivant $\begin{cases} y + z = 4 \\ x + y + 2z = 7 \\ x + 2y + 3z = 11 \end{cases}$.

Interprétation géométrique :
- Avec 2 inconnues, l'ensemble des solutions correspond à une intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$.
- Avec 3 inconnues, l'ensemble des solutions correspond à une intersection de plans dans $\mathbb{R}^3$.