Chapitre 4 : Calcul algébrique

Table des matières

1 Sommes **2**
1.1 Notation symbolique . . . 2
1.2 Linéarité de la somme . . . 2
1.3 Changement d'indice . . . 2
1.4 Progressions arithmétiques . . . 3
1.5 Télescopage . . . 3
1.6 Progressions géométriques . . . 3
1.7 Regroupement et découpage de termes . . . 4
1.8 Autres sommes classiques . . . 5
1.9 Sommes doubles . . . 5

2 Produits **6**

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme **7**
3.1 Coefficients binomiaux . . . 7
3.2 Formule du binôme . . . 8
3.3 Applications à la trigonométrie . . . 9

4 Systèmes linéaires **9**
4.1 Méthode du pivot de Gauss ou algorithme de Gauss-Jordan . . . 9

Le nom calcul peut aussi bien désigner une opération en mathématiques qu'une concrétion pierreuse en médecine. Mais dans les deux cas il a la même étymologie. À l'origine du mot français, on trouve le mot latin calculus, qui signifie « caillou ». Dans l'Antiquité romaine, on utilisait des tables à calculer (ancêtres des bouliers) sur lesquelles on plaçait des cailloux pour faire les calculs. C'est pour cette raison que le mot calculus a donné le verbe français calculer. Et c'est de ce verbe que dérive le nom calcul pour désigner une opération. Quant au nom calcul qui désigne un petit caillou qui se forme dans le corps, et qu'on retrouve dans des expressions médicales comme calcul rénal ou calcul biliaire, il vient directement du nom latin calculus.
Dans ce chapitre, nous allons aborder différentes notions calculatoires, notamment la méthode du pivot de Gauss. Cette méthode qui permet de résoudre des équations porte le nom d'un des plus grands mathématicien de tous les temps, Carl Friedrich Gauß. Ce dernier est surnommé le « prince des mathématiques ». Même si cette méthode fut popularisée sous ce nom au XIXe siècle, l'algorithme du pivot de Gauss est connue des mathématiciens chinois depuis au moins le Ier siècle de notre ère. Elle est référencée dans le livre chinois Jiuzhang suanshu (Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique), dont elle constitue le huitième chapitre, sous le titre « Fang cheng » (la disposition rectangulaire).

Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)

1 Sommes

1.1 Notation symbolique

Soit I un ensemble fini, et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.
On note $\sum\limits_{i\in I} a_i$ la somme de tous les nombres a_i lorsque i décrit l'ensemble I.

Dans le cas particulier où I est de la forme $[\![p\,;n]\!]$ avec p et n des entiers, cette somme est notée $\sum\limits_{i=p}^{n} a_i$:

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Par convention, dans le cas où $I = \emptyset$, la somme $\sum\limits_{i\in I} a_i$ vaut 0 (élément neutre pour l'addition).

En particulier, si $p > n$, la somme $\sum\limits_{i=p}^{n} a_i$ vaut 0 (car l'ensemble $[\![p\,;n]\!]$ est vide).

Remarque : Dans une telle écriture, la variable i est muette : $\sum\limits_{i=p}^{n} a_i = \sum\limits_{j=p}^{n} a_j = \sum\limits_{k=p}^{n} a_k \ldots$

Exemple 1.1 : Calculer $\sum\limits_{k=1}^{5} k^2$.

1.2 Linéarité de la somme

Proposition 1.2 (linéarité de la somme)

Soient p et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leqslant n$, $(a_i)_{i\in[\![p\,;n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![p\,;n]\!]}$ deux familles de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{i=p}^{n}(a_i + \lambda b_i) = \sum_{i=p}^{n} a_i + \lambda \sum_{i=p}^{n} b_i$$

Exemple 1.3 : Calculer $\sum\limits_{k=1}^{5}(2k^2+1)$.

1.3 Changement d'indice

Exemple 1.4 : On souhaite calculer $S = \sum\limits_{i=11}^{50} i$.

On sait que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (voir théorème 1.6) mais on repère un décalage entre 1 et 11 dans l'indice de départ.
Or en posant $j = i - 10$, lorsque i décrit les entiers entre 11 et 50, j décrit les entiers entre 1 et 40.
Autrement dit, on a le tableau de valeurs suivant :

i	11	12	13	...	48	49	50
j	1	2	3	...	38	39	40

Par ailleurs $j = i - 10 \Leftrightarrow i = j + 10$. Par conséquent, $S = \sum\limits_{i=11}^{50} i = \sum\limits_{j=1}^{40}(j+10)$.

On vient de réaliser un <u>changement</u> d'indice, appelé également <u>décalage</u> d'indice ou encore <u>glissement</u> d'indice.

Trois endroits sont impactés :
- borne inférieure (en bas) ;
- borne supérieure (en haut) ;
- terme général.

Remarque : Réaliser un changement d'indice nécessite une grande vigilance de manière à ne supprimer ni ajouter aucun terme à la somme initiale. Une attention particulière est requise pour un changement d'indice avec renversement c.a.d. du type $j = n - i$. Dans ce cas, les bornes de la somme sont à remettre dans le bon sens.

Exemple 1.5 : Écrire $\sum\limits_{i=2}^{19} a_{20-i}$ plus simplement.

1.4 Progressions arithmétiques

Théorème 1.6 (somme des premiers entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

Théorème 1.7 (somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, et soient p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$.
Alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.

1.5 Télescopage

Définition 1.8 (somme télescopique)

Soient $p,n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n+1\}}$ une famille de complexes.
On appelle <u>somme télescopique</u> une somme de la forme : $\sum\limits_{i=p}^{n}(a_{i+1} - a_i)$.

Proposition 1.9 (calcul d'une somme télescopique)

Soient $p,n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n+1\}}$ une famille de complexes.
Alors $\sum\limits_{i=p}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_p$.

Exemple 1.10 : Calculer $\displaystyle\sum_{k=5}^{29} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

1.6 Progressions géométriques

Théorème 1.11 (factorisation de $a^n - b^n$)

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\quad a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$

Remarque :

- En particulier, pour $b = 1$, $a^n - 1 = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$.
- Lorsque n est impair, $-b^n = (-b)^n$, ce qui conduit à la relation :

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^k b^{n-1-k} = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^{n-1-k} b^k$$

Théorème 1.12 (somme des q^k)

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.

Théorème 1.13 (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, et soient p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$.
Alors $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = (\text{premier terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

Exemple 1.14 : Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ (avec $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$).

Théorème 1.15 (somme des racines n-ièmes de l'unité)

Pour tout $n \in [\![2\,;+\infty[\![$, $\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{e}^{2\mathbf{i}k\pi/n} = 0$.

Cas particulier : Pour $n = 3$, on retrouve la relation : $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = 0$.

1.7 Regroupement et découpage de termes

Proposition 1.16 (découpage d'une somme)

Soient $p,n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n\}}$ une famille de complexes. Soit $k \in [\![p,n]\!]$.
Alors $\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{i=p}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$.

Exemple 1.17 : Soit $n \in [\![5, +\infty[\![$. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \max(i,5)$.

Proposition 1.18 (découpage d'une somme selon la parité de l'indice)

Soient $p,n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n\}}$ une famille de complexes.
Alors $\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{\substack{i=p \\ i \text{ pair}}}^{n} a_i + \sum_{\substack{i=p \\ i \text{ impair}}}^{n} a_i$.

Exemple 1.19 : Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{500} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$.

1.8 Autres sommes classiques

Théorème 1.20 (somme des premiers carrés)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Théorème 1.21 (somme des premiers cubes)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

1.9 Sommes doubles

Définition 1.22 (sommes doubles rectangulaires)

Soient I et J des ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres complexes.
On appelle <u>somme double rectangulaire</u> une somme de la forme :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} a_{i,j}\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} a_{i,j}\Big)$$

Dans le cas particulier où $I = [\![p\,;n]\!]$ et $J = [\![q\,;m]\!]$ sont de la forme $[\![p\,;n]\!]$ avec p, n, q et m des entiers, on peut noter $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n\\ q\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=q}^{m} a_{i,j}\right)}_{\text{« somme par ligne »}} = \underbrace{\sum_{j=q}^{m}\left(\sum_{i=p}^{n} a_{i,j}\right)}_{\text{« somme par colonne »}}$.

<u>Représentation des termes impliqués dans la somme double rectangulaire :</u>

$i \backslash j$	q	$q+1$	...	m
p	$a_{p,q}$	$a_{p,q+1}$	...	$a_{p,m}$
$p+1$	$a_{p+1,q}$	$a_{p+1,q+1}$	...	$a_{p+1,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$a_{n,q}$	$a_{n,q+1}$	...	$a_{n,m}$

Notation : Lorsque $I = J = [\![p\,;n]\!]$, la somme rectangulaire est notée $\displaystyle\sum_{p\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$.

Proposition 1.23

Soient I et J des ensembles finis et $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles de nombres complexes.

On a : $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$

Exemple 1.24 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$ puis $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$.

Définition 1.25 (sommes doubles triangulaires)

Soient p et n des entiers et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![p\,;n]\!]^2}$ une famille de nombres complexes.
On appelle <u>somme double triangulaire</u> une somme de la forme :

$$\sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \underbrace{\sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)}_{\text{« somme par ligne »}} = \underbrace{\sum_{j=p}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j} a_{i,j}\right)}_{\text{« somme par colonne »}}$$

Représentation des termes impliqués dans la somme double triangulaire :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$\dots$	n
p	$a_{p,p}$	$a_{p,p+1}$	$\dots$	$a_{p,n}$
$p+1$		$a_{p+1,p+1}$	$\dots$	$a_{p+1,n}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
n				$a_{n,n}$

Remarque : Les sommes doubles triangulaires peuvent également exclure la diagonale : $\displaystyle\sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}$.

Exemple 1.26 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$.

2 Produits

On définit de même que pour les sommes la notation $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ ou $\displaystyle\prod_{i=p}^{n} a_i$ pour un produit, avec la convention qu'un « produit vide » vaut 1 (élément neutre pour la multiplication).

Exemple 2.1 : Calculer $\displaystyle\prod_{i=1}^{4} i^2$.

Proposition 2.2 (lien entre produits et sommes)

1. Pour toute famille finie $(a_i)_{i\in I}$ de réels strictement positifs, $\ln\left(\displaystyle\prod_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} \ln(a_i)$.
2. Pour toute famille finie $(a_i)_{i\in I}$ de complexes, $\exp\left(\displaystyle\sum_{i\in I} a_i\right) = \prod_{i\in I} \exp(a_i)$.

Définition 2.3 (factorielle d'un entier naturel)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Ce nombre est appelé <u>factorielle n</u> (ou n factorielle).

Valeurs à retenir : $0! = 1$ $1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n(n-1)!$

Définition 2.4 (produit télescopique)

Soient $p,n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n+1\}}$ une famille de complexes non nuls.
On appelle <u>produit télescopique</u> un produit de la forme : $\prod\limits_{i=p}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i}$.

Proposition 2.5 (calcul de produit télescopique)

Soient $p,n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Soit $(a_i)_{i\in\{p,\dots,n+1\}}$ une famille de complexes non nuls.
Alors $\prod\limits_{i=p}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$.

Exemple 2.6 : Calculer $\displaystyle\prod_{k=5}^{29} \frac{k+1}{k}$.

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

3.1 Coefficients binomiaux

Définition 3.1 (coefficient binomial k parmi n)

Soient n et $k \in \mathbb{Z}$. Le <u>coefficient binomial</u> est noté $\binom{n}{k}$ (lire « k parmi n »).

Il est défini par $\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exemple 3.2 : Calculer $\binom{4}{2}$ et $\binom{2}{4}$.

Remarque : On s'intéresse uniquement aux coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour n et k entiers naturels.

Proposition 3.3 (propriétés des coefficients binomiaux)

Soient n et $k \in \mathbb{N}$.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. Si $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
3. Si $k \leqslant n$, alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. Formule du triangle de Pascal : $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$.

Remarque : On peut représenter les coefficients binomiaux dans un tableau. C'est sa forme triangulaire qui donne le nom de *Triangle de Pascal*.

$n \backslash k$	0	1	2	3	$\dots$	k	$k+1$
0	$\binom{0}{0} = 1$	0	0	0	$\dots$	0	0
1	$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$	0	0	$\dots$	0	0
2	$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$	0	$\dots$	0	0
3	$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$	$\ddots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{1} = n$				$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$
$n+1$	$\binom{n+1}{0} = 1$	$\binom{n+1}{1} = n+1$					$\binom{n+1}{k+1}$

3.2 Formule du binôme

Théorème 3.4 (formule du binôme)

Pour tous $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$

Exemple 3.5 : Soit $x \in \mathbb{C}$. Calculer $(1+x)^5$.

Corollaire 3.6

Pour tous $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$: $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Remarque : Retenir que les signes $+$ et $-$ sont alternés. Par exemple : $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

3.3 Applications à la trigonométrie

Linéarisation : Pour linéariser une expression du type $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$:
- on utilise les formules d'Euler pour exprimer $\cos\theta$ ou $\sin\theta$ en fonction d'exponentielles complexes ;
- on développe en utilisant la formule du binôme ;
- on regroupe les termes ayant des arguments opposés de manière à faire apparaître des cosinus ou des sinus.

Exemple 3.7 : Soit $t \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin(2t)^6$.

Développement : Pour exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme des polynômes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$:
- on utilise la formule de Moivre : $\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta} = (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n$
- on développe en utilisant la formule du binôme ;
- on prend la partie réelle ou imaginaire ;
- éventuellement, on utilise la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ pour tout exprimer en fonction de cos ou sin.

Exemple 3.8 : Soit $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5t)$ en fonction de $\cos(t)$.

4 Systèmes linéaires

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues un système du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n. \end{array}\right.$$

Les nombres (réels ou complexes) $a_{i,j}$, b_j sont donnés, on les appelle les coefficients du système. Les x_i sont les inconnues du système, résoudre le système revient à déterminer les valeurs possibles des x_i.

Définition 4.1 (opérations élémentaires)

Dans un système linéaire, on appelle opérations élémentaires sur les lignes les opérations suivantes :
- *transposition* : échange de deux lignes, noté $L_i \leftrightarrow L_j$;
- *dilatation* : multiplication d'une ligne par un scalaire λ non nul, noté $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- *transvection* : addition d'un multiple d'une ligne à une autre, noté $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque : Transformer un système linéaire donné par opérations élémentaires sur les lignes ne modifie l'ensemble de ses solutions. Autrement dit, les opérations élémentaires préservent les équivalences.
En effet, l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ se "défait" d'elle-même.
L'opération $L_i \longleftarrow \lambda L_i$ est "défaite" par l'opération $L_j \longleftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$ (c'est la raison pour laquelle on suppose $\lambda \neq 0$).
L'opération $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ est "défaite" par l'opération $L_i \longleftarrow L_i - \lambda L_j$.

Conséquence : Pour éviter toute perte d'information, nous résoudrons des systèmes uniquement par opération élémentaire sur les lignes.

4.1 Méthode du pivot de Gauss ou algorithme de Gauss-Jordan

La méthode du pivot de Gauss est une méthode efficace pour résoudre un système linéaire par équivalences successives.

Méthode présentée avec un système quelconque $\left\{\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$

Étape 1 : choix du premier pivot ✓
Il s'agit d'un coefficient non nul (de préférence 1 pour faciliter la suite des calculs) à partir duquel on pourra éliminer des termes. À l'aide de l'opération élémentaire $L_i \longleftrightarrow L_j$, placer ce terme en première position.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Étape 2 : annuler les termes sous le premier pivot à l'aide d'opérations élémentaires du type $L_i \longleftrightarrow L_i + \lambda L_1$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Étape 3 : reprendre les étapes 1 et 2 pour le sous système (lignes 2 et 3 ici).

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

En continuant ainsi de suite on obtient un <u>système échelonné</u> :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Étape 4 : À l'aide d'opérations élémentaires du type $L_i \longleftrightarrow L_i + \lambda L_j$, annuler les termes au-dessus de chaque pivot.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Dans ce cas, les <u>inconnues principales</u> (ici les ✓) s'expriment en fonction des <u>inconnues secondaires</u> (les autres) qui deviennent paramètres.

Exemple 4.2 : Résoudre les systèmes d'inconnues réelles suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{l} x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{l} x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11 \end{array}\right. \qquad (S_3) : \left\{\begin{array}{l} x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \end{array}\right.$$

Interprétation géométrique :
- Avec 2 inconnues, l'ensemble des solutions correspond à une intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$.
- Avec 3 inconnues, l'ensemble des solutions correspond à une intersection de plans dans $\mathbb{R}^3$.